27/10/2016

Μάθημα 6ο

Διαφορικές εξισώσεις:

Γενική Διαφορική Εξίσωση Β' τάξης:

$$y'' + p_2 y' + p_1 y = q \quad (E) \qquad p_1, p_2, q \in C(I)$$

$$y'' + p_2 y' + p_1 y = 0 \quad (E_0) \qquad \text{(ομογενής)}$$

Αν y_1 ($y_1 \neq 0$) λύση της (E_0), τότε για $y = y_1 z$, η (E) ανάγεται σε μια δ.ε α' τάξης.

Πράγματι, για $y = y_1 z$ έχουμε

$$(y_1 z)'' + p_1 (y_1 z)' + p_2 (y_1 z) = q \Rightarrow$$

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + p_1 (y_1' z + z' y_1) + p_2 y_1 z = q \Rightarrow$$

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + p_1 y_1' z + p_1 z' y_1 + p_2 y_1 z = q \Rightarrow$$

$$z(\underbrace{y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1}_{=0}) + y_1 z'' + (2 y_1' + p_1 y_1) z' = q \xRightarrow{z' = u}$$

$$y_1 u' + (2 y_1' + p_1 y_1) u = q \Rightarrow$$

$$\boxed{u' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + p_1\right) u = \frac{q}{y_1}} \longrightarrow \text{γραμμική Α' τάξης}$$

Εργαζόμαι όπως ξέρω!!

Πχ Άσκηση Αν, σελ. 53 βιβλίο.

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{x}, \quad y_1 = e^{-x} \text{ λύση της } (E_0).$$

Λύση

$y = e^{-x} z$. Τότε θα έχουμε:

$$z'' + 2(-e^{-x}) z' + e^{-x} z + 3[-e^{-x} z + z' + z' e^{-x}] + 2 z e^{-x} = xe^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'' - 2e^{-x} z' + e^{-x} z - 3e^{-x} z + 3 z' e^{-x} + 2 z e^{-x} = xe^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'' + (-2e^{-x} + 3e^{-x}) z' = xe^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z'' + e^{-x} z' = xe^{x}} \quad \text{Θέτω } z' = u$$

$$\Rightarrow u' + \frac{e^{-x}}{e^{-x}} u = \frac{xe^{x}}{e^{-x}} \Rightarrow u' + u = xe^{2x} \Rightarrow u = e^{-x}\left[c + \int xe^{3x} dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = ce^{-x} + e^{2x}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right] \Rightarrow y(x) = y_1 z = y_1\left[\int u(x) dx + c'\right] \Rightarrow \boxed{y = e^{-x}\left[\int u\, dx + c'\right]}$$

(A-4) iii) $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$, $y = e^{1/x}$, $x > 0$

Σπιτι.

(HW) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. ΝΔΟ

→ Αν $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \varphi(xy)$ ~~τοτε~~ και $\rho(u) = e^{\int \varphi(u)du}$, τοτε η $\rho(xy)$ ειναι ολ. παραγ.

→ $(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)dy = 0$.

(HW) $y'' - 5y' + 4y = q(t)$

e^x → S_1, e^{4x} → S_2

Να εξετασω αν τα συνολα S_1 & S_2 ειναι ιδια.

(ΓΑ 20) Να βρεθει μια συναρτηση $f \in C^1(\mathbb{R})$ τω

$$f(x) + 1 = \int_0^x f(t)[tf(t) - 1]dt$$

Λυση

Η ~~ανω~~ ολοκληρωταια ποσοτητα ειναι συνεχης, αρα μπορουμε να παραγωγισουμε τη δοσμενη σχεση:

$f'(x) = f(x)[xf(x) - 1]$, $x \in \mathbb{R}$ ⇒

$\boxed{f'(x) = xf^2(x) - f(x),\ x \in \mathbb{R}}$ → εξισωση Bernouli.

Βγαζουμε οτι $f(0) = -1$

(22 ii) $\dfrac{1}{y^2+1} y' + \dfrac{2}{x} \text{Arctg}y = \dfrac{2}{x}$

Λυση

Θετω $z = \text{Argtan}y$ $\quad z' = \dfrac{1}{y^2+1} y'$

Τοτε η εξισωση θα γινεται: $z' + \dfrac{2}{x} z = \dfrac{2}{x}$

Εργαζομαι οπως γνωριζω.

(Α30) Νδο για τυχουσες σταθερες c_1, c_2, c_3, η συναρτηση

$$y(x)=\begin{cases} c_1(x^2-1) & x<-1 \\ c_2(x^2-1)^2 & -1\le x\le 1 \\ c_3(x^2-1)^2 & x>1 \end{cases}$$

ειναι μια λυση της εξισωσης $(x^2-1)y'-4xy=0$.

Λυση

Εξεταιουμε αν ο καθε κλαδος ικανοποιει τη σχεση.
Μετα θα πρεπει να εξετασουμε αν ικανοποιειται και στα σημεια που αλλαζει ο τυπος.
Πρωτα όμως πρεπει να εξετασουμε αν η y είναι παραγωγισιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ (και στα σημεια αλλαγης τυπου).

Συνθηκη Lipschitz

① Ας ειναι $R=\{(x,y): |x-x_0|\le a \ \& \ |y-y_0|\le b\}\subseteq D_f$
Η f πληροί μια συνθηκη Lipschitz με σταθερα k στο R αν
$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le k|y_1-y_2| \quad \forall (x,y)\in R$.

② Ας ειναι $R=\{|x-x_0|\le a \ \& \ |y-y_0|\le b\}\subseteq D_f$.
Αν η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπαρχει και ειναι συνεχης στο R, τοτε η f ικανοποιει μια συνθηκη Lipschitz στο R με σταθερά $k=\max_R\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$

③ Οπως ② αλλα αν ειναι συνεχης & φραγμενη.

παρ. 1: $g(x,y)=\sin y+y\cos x \quad R:=\{(x,y): |x|\le 1 \ \& \ |y|\le 2\}$
Να εξεταστει αν η g ικανοποιεί μια συνθηκη Lipschitz.

Λυση

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right|=|\cos y+\cos x|,\quad x,y\in R$$
$$\le |\cos y|+|\cos x|$$
$$\le 1+1=2 \longrightarrow$$ Η g ικανοποιει μια συνθηκη Lipschitz με k=2.

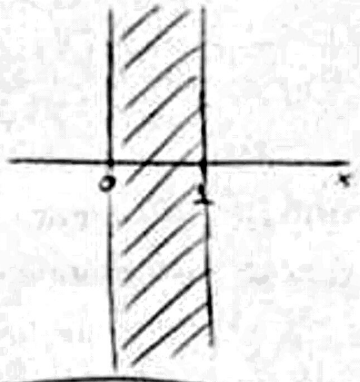
Ασκηση 1 (σελ 27): $g(x,y)=x^3e^{-xy^2}$, $S=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y$ αυθαίρετο$\}$

Να εξεταστεί αν η g είναι συνθήκη Lipschitz.

Λύση

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = |x^3e^{-xy^2}(-2xy)|$$

⟶ θέλω να δω αν είναι φραγμένο στο S.



$$= |x^3|\frac{2|x||y|}{e^{xy^2}} = x^3\frac{2x|y|}{e^{xy^2}} \le \frac{2|y|}{e^{xy^2}}$$

Αρκεί νδο η συνάρτηση $\frac{2y}{e^{xy^2}}, y\ge 0$ είναι φραγμένη $\forall x\in[0,1]$

Έχουμε για $x\in[0,1]$: $\lim_{y\to\infty}\frac{2y}{e^{xy^2}}=0$ με $\varphi_x(y)$

α' τρόπος

$\Rightarrow \varphi$: φραγμένη σο $[0,1]$

β' τρόπος

$$= x^3\frac{2x|y|}{e^{xy^2}} \le \frac{2e^{x|y|}}{e^{xy^2}} = \frac{2}{e^{xy^2-xy}} = \frac{2}{e^{xy(y-1)}} \le 2 \text{ για } y\ge 1$$

για $0\le y\le 1$ $\frac{x^3 2x|y|}{e^{xy^2}}$ ⟶ συνεχής σε συμπαγές $\Big| \Rightarrow$ φραγμένη.

Νδο η συνάρτηση $f(x,y)=3xy^{1/3}$ δεν πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $R=\{(x,y): |x|\le a \ \& \ |y|\le b\}$, $(a,b>0)$ παρ. 1 σελ. 21.

Λύση

Το ότι δεν είναι φραγ. η μερική παράγωγος δε σημαίνει ότι δεν ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz!!

Ας είναι $k>0$ $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le k|y_1-y_2|$ $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R$

δηλ. $|3xy_1^{1/3}-3xy_2^{1/3}|\le k|y_1-y_2|$

Για $y_1=\delta$ $y_2=-\delta$ $|\delta|\le b$ θα είναι

$$|3a\delta^{1/3}-3a(-\delta)^{1/3}|\le k2\delta \Rightarrow |3a2\delta^{1/3}|\le k\delta 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 3a\delta^{1/3}\le k2\delta \Rightarrow \frac{3a}{k}\le \delta^{2/3}\xrightarrow[\text{για } \delta\to 0]{} 0 \quad \text{Άτοπο}$$